CATALAN SAYILARI

Ön Bilgiler

n, 0'la sonsuz arasında değişirken $(a_n)_n$ dizisinin doğuran fonksiyonu $f(x)=a_0+a_1.x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ ya da daha kısa bir ifadeyle

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$ olarak ifade edilir.

Örnek| Bütün elemanları 1'den oluşan $(a_n)_n=(1)_n$ dizisinde, bütün n için $a_n=1$ olsun. $(1)_n$ dizisinin doğuran fonksiyonu

$f(x)=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$ (Çünkü $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)=1$

Benzer şekilde,

$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=\binom{-1}{0}x^0+\binom{-1}{1}x^1+\binom{-1}{2}x^2+\binom{-1}{3}x^3+\dots\binom{-1}{n}x^n+\dots$

$=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+\dots$

$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$

$\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+\dots 2^n.x^n+\dots$

yazabiliriz $(a+b)^n$ açılımından!

Problem 1| (Sıralı Çarpım Sayısı) n+1 tane sayı belli bir sırayla verilmiş. Bu sayıları, sıralarını değiştirmeden kaç değişik şekilde çarpabiliriz?

Problem 2| (Dengelenmiş Parantezler) Diyelim elimizde n açan ve n kapatan parantez var ve bu parantezlerin kaç "dengeli" şekilde gruplanabileceğini bulmak istiyoruz. Burada "dengeli"den kastımız her açılan parantezin bir parantez tarafından kapatılması

Üretici Fonksiyonlar (tanım)

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ reel sayılardan oluşan sonsuz uzunlukta bir dizi olsun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \text{ olsun}$$

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonuna $a_0, a_1, a_2 \ldots$ dizisinin "üretici fonksiyonu" denir

* $a_0 = 0,\ a_1 = 1, \ldots, a_n = n, \ldots$ dizisinin üretici fonksiyonu,

$$f(x) = 0 \cdot x^0 + 1 x^1 + 2 \cdot x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x^i \text{ olur}$$

Lemma $\binom{-n}{r} = (-1)^r \cdot \binom{n+r-1}{r}$ $\quad (n \in \mathbb{Z}^+, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$

İspat $\binom{-n}{r} = \dfrac{-(n)(-n-1)(\ldots\ldots)\ldots(-n-r+1)}{r!}$

$$= \frac{(-1)^r \cdot n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} = (-1)^r \cdot \binom{n+r-1}{r} \text{ olur}$$

1) $$\frac{1}{(1+x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \binom{n+i-1}{i} x^i$$

2) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

3) $$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2} \cdot (-x)^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

$f(x)=(1+x+x^2+\dots)^n$ fonksiyonunda x^r'nin katsayısını bulunuz.

$$\longrightarrow (1+x+x^2+\dots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\binom{n+i-1}{i}}_{\checkmark}x^i$$

Problem) $i=1,2,3$ için $a_i\geq 0$ olmak üzere $a_1+a_2+a_3=7$ denkleminin tam sayılar kümesinde çözüm sayısını bulunuz?

$$\longrightarrow f(x)=\underbrace{(1+x+x^2+\dots+x^7)}_{f_1(x)}\underbrace{(1+x+x^2+\dots+x^7)}_{f_2(x)}\underbrace{(1+x+x^2+\dots+x^7)}_{f_3(x)} \text{ olsun}$$

$x^{a_1+a_2+a_3}=x^7 \longrightarrow$ bizden istenen x^7'nin katsayısı olmalı.

$(1+x+x^2+\dots+x^7)^3$ x^7'nin katsayısı nedir?

$$\longrightarrow (1+x+x^2+\dots+)^3=\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i-1}{i}x^i$$

$i=7$ için

$$=\dots+\binom{3+7-1}{7}x^7+\dots \Rightarrow \text{olmalı} \quad (\text{üretici fonk — matematik özeti})$$

Problem) $2y+3z+5w+7t=18$ denkleminin kaç tane negatif olmayan tam sayı çözümü vardır?

$$\longrightarrow (1+x^2+x^4+\dots+x^{18}).(1+x^3+x^6+\dots+x^{18})$$
$$(1+x^5+x^{10}+x^{15}).(1+x^7+x^{14}) \longrightarrow x^{18} \text{ tam katsayısı} \to 14 \text{ bulun}$$

Başlangıçta sorduğumuz "problem2"yi yapmaya çalışalım

$n=0 \longrightarrow$ yok!

$n=1 \longrightarrow$ ( ) (1)

$n=2 \longrightarrow$ ( )( ), (( )) (2)

$n=3 \longrightarrow$ (5) $\rightarrow$ ( )( )( ), ( )(( )), (( )( )), ((( )))

Bun (A) B ile ifade edelim. A ve B grupları toplamda $(n-1)$ çift barındırır. A, k tane parantez çifti içeriyorsa; B $n-k-1$ tane içerir.

$$\left.\begin{matrix} A \to 0 \\ B \to n-1 \end{matrix}\right) \to C_0 C_{n-1} \Big\} \to C_n = C_0 . C_{n-1} + C_1 . C_{n-2} + \dots + C_{n-1} . C_0$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_0 . C_0 \\ C_2 &= C_1 C_0 + C_0 C_1 \\ C_3 &= C_2 C_0 + C_1 C_1 + C_0 C_2 \\ &\dots \end{aligned}\right\} C_n = C_{n-1} C_0 + C_{n-2} C_1 + \dots + C_1 C_{n-2} + C_0 C_{n-1}$$

Şimdi üretici fonksiyonları kullanarak bu ifadeyi bulmaya çalışalım

$$f(z) = C_0 + C_1 . z + C_2 . z^2 + C_3 z^3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} C_i . z^i .$$

her tarafı $f(z)$ ile çarparsak

$$[f(z)]^2 = C_0 . C_0 + (C_1 . C_0 + C_0 . C_1) z + (C_2 C_0 + C_1 . C_1 + C_0 . C_2) z^2 + \dots$$

$$[f(z)]^2 = C_1 + C_2 . z + C_3 . z^2 + C_4 . z^3 + \dots \quad (*)$$

(*) z ile çarpıp C_0 eklenirse

$$f(z) = C_0 + z . (f(z))^2 \longrightarrow z . f^2 - f + C_0 = 0$$

$$z f^2 - f + 1 = 0 \longrightarrow f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \text{ bulunur}$$

$$(1-4z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right) . 4z}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}{2!} . (4z)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) . \left(\frac{-3}{2}\right)}{3.2.1} . (4z)^3 + \dots$$

$$- \frac{5.3.1}{4!} . 16 . z^4 - \frac{7.5.3.1}{5!} . 32 z^5 - \dots$$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2!}{1!.1!}\right) z + \frac{1}{3}\left(\frac{4!}{2!.2!}\right) z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{6!}{3!.3!}\right) z^3$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{8!}{4!.4!}\right) z^4 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} z^i$$

i. katalan sayıyı veren formül,

$$C_i = \left(\frac{1}{i+1}\right) \binom{2i}{i}$$