

Değiştirip Değiştirmemek Bir Şey Değiştirir mi Değiştirmez mi?

İhsan Yücel

Biri iki kapalı zarfla size gelip şöyle diyor:

– Bu kapalı zarflarda para var. Hangisinde ne kadar olduğunu bilmiyorum ama birindeki paranın diğerindekinin iki katı olduğunu biliyorum. İsteddiğini seç, içindeki para senin...

Oh ne âlâ! Zarflardan birini seçiyorsunuz. Size durduk yerde para vermek isteyen iyi kalpli kişi iyilikte sınır tanımıyor ve size,

– İstersen bu zarfı bırak diğerini seç... diye bir seçenek sunuyor.

Ne yaparsınız? Zarfı değiştirir misiniz değiştirmez misiniz? Yoksa zarfı değiştirip değiştirmemek bir şey farketmez mi?

Sanki değiştirip değiştirmemek farketmezmiş gibi geliyor... Matematikçiler hislerine çok önem verseler de - en azından iş matematiğe gelince - asla hislerine teslim olmazlar! Kanıtlayalım.

Farketmez!

Zarfların birinde n lira, diğerinde $2n$ lira olsun.

Önce zarfları değiştirmedığımızı varsayalım. $1/2$ olasılıkla n liralık zarfı seçmişizdir ve n lira kazanırız. $1/2$ olasılıkla $2n$ liralık zarfı seçmişizdir ve $2n$ lira kazanırız. Demek ki bu durumda beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times n + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}$$

dir.

Şimdi zarfları değiştirdiğimizi varsayalım. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla n lira vardır ve zarfı değiştirdiğimizden $2n$ lira kazanırız. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla $2n$ lira da olabilir ve o zaman zarfı değiştirdiğimizden n lira kazanırız. Bu durumda beklentimiz

$$\frac{1}{2} \times 2n + \frac{1}{2} \times n = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$$

olur.

Her iki stratejide de $3n/2$ bulduk. Demek ki değiştiresek de değiştirmesek de bir şey farketmez. Tahmin ettiğimiz gibi...

Farkeder!

Ama bir de şöyle düşünelim: Bir zarf seçtik ve diyelim zarfta m lira var. Hatta zarfa bakıp zarfta m lira olduğunu gerçekten görebiliriz de. Diğer zarfta ya $m/2$ lira ya da $2m$ lira olmalı; tam ne kadar olduğunu bilmiyoruz. $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira, $1/2$ olasılıkla $2m$ lira vardır.

Her iki stratejide de beklentileri hesaplayalım, bakalım hangisinde daha yüksek çıkacak.

Zarfı değiştirmesek m lira kazanacağız elbette, bundan kuşku-muz yok.

Eğer değiştiresek, diğer zarfta $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira olacak ve $1/2$ olasılıkla $2m$ lira olacak. Demek ki değiştiresek beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \times 2m = \frac{m}{4} + m = \frac{5m}{4}$$

olacak.

Değiştirmesek beklentimiz m olacaktı. $5m/4$, m 'den daha büyük olduğundan, bu sefer en iyi stratejinin değiştirmek gerektiğini bulduk.

Allah Allah!..

Aynı soruyu iki değişik biçimde düşündük ve birinde değiştirep değiştirmemenin farketmediğini bulduk, diğerinde ise değiştirmenin daha iyi olacağını bulduk...

Matematikte iki ayrı yöntemle iki ayrı yanıt bulmak pek enderdir. Olmaz değil, özellikle olasılık sorularında olabilir. Ama enderdir. Bertrand Paradoksu bu çelişik olasılık sorularının en ünlülerinden biridir.

Peki burada neler oluyor? Neden iki değişik yanıt buluyoruz? Bir yerde yanlış mı yaptık? Doğru yanıt nedir? Yoksa matematik çelişkili mi?

Kitabın Yazarının Notu: Birinci yanıtın doğru olduğunu, yani değiştirep değiştirmemek arasında bir fark olmadığını bir bilgisayar programı yaparak anladım. Ama bunun mantıksal bir açıklamasını bulamadığımı itiraf ederim.

Sonradan Eklenmiř Bir Not Daha: Haluk Oral, zarfları değiştirip değiştirmememizin fark etmeyeceğini çok güzel bir mantık yürüterek açıkladı. Açıklama şöyle: Diyelim değiştirmekle daha kazançlı çıkıyoruz. O zaman zarfları iki kişi arasında paylaştıralım. Madem zarfı değiştirmek daha doğru, o zaman her iki kişi de zarfı değiştirir, zarfları değiş tokuş ederler yani, ve her ikisi de daha fazla para kazanır! Hatta zarfları hiç açmadan sürekli değiştirirlerse, her ikisi de beklentilerini sürekli artırırlar! Bu mümkün olmadığından zarfları değiştirip değiştirmemek fark etmemeli.

Ama Haluk Oral'ın bu güzel kanıtı ikinci akıl yürütmenin neresinde yanlış olduğunu söylemiyor.

Bir Not Daha: Meęer bu, bilinen ve bugüne kadar doyurucu bir açıklaması bulunamayan bir paradoksmuş...