

Değiştirip değiştirmemek bir şey değiştirir mi değiştirmem mi?

Bu yazı matematik öğretmenliği öğrencisi İhsan Yücel'le ortak yazılmıştır.

Biri iki kapalı zarfla size gelip şöyle diyor:

- Bu kapalı zarflarda para var. Hangisinde ne kadar olduğunu bilmiyorum ama birindeki paranın diğerindekinin iki katı olduğunu biliyorum. İstediyini seç, içindeki para senin...

Oh ne âla! Zarflardan birini seçiyorsunuz. Size durduk yerde para vermek isteyen iyi kalpli kişi iyilikte sınır tanımıyor ve size,

- İstersen bu zarfı bırak diğerini seç... diye bir seçenek sunuyor.

Ne yaparsınız? Zarfı değiştirir misiniz, değiştirmem misiniz? Yoksa zarfı değiştirip değiştirmemek bir şey fark ettirmem mi?

Sanki değiştirip değiştirmemek fark etmezmiş gibi geliyor... Matematikçiler hislerine çok önem verseler de asla teslim olmazlar. Kanıtlayalım.

Zarfların birinde n lira, diğerinde $2n$ lira olsun.

Önce zarfları değiştirmediyimizi varsayalım. $1/2$ olasılıkla n liralık zarfı seçmişizdir ve n lira kazanırız. $1/2$ olasılıkla $2n$ liralık zarfı seçmişizdir ve $2n$ lira kazanırız. Demek ki bu durumda beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times n + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}$$

dir.

Şimdi zarfları değiştirdiyimizi varsayalım. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla n lira vardır ve zarfı değiştirdiyimizden $2n$ lira kazanırız. Seçtiğimiz zarfta $1/2$ olasılıkla $2n$ lira da olabilir ve o zaman zarfı değiştirdiyimizden n lira kazanırız. Bu durumda beklentimiz

$$\frac{1}{2} \times 2n + \frac{1}{2} \times n = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$$

olur.

Her iki stratejide de $3n/2$ bulduk. Demek ki değiştirsek de, değiştirmesek de, bir şey değiştirmez.

Ama bir de şöyle düşünelim: Bir zarf seçtik ve diyelim zarfta m lira var. Hatta zarfa bakıp zarfta m lira olduğunu gerçekten görebiliriz de. Diğer zarfta ya $m/2$ lira ya da $2m$ lira olmalı; tam ne kadar olduğunu bilmiyoruz. $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira, $1/2$ olasılıkla $2m$ lira vardır.

Her iki stratejide de beklentileri hesaplayalım, bakalım hangisinde daha yüksek çıkacak.

Zarfı değiştirmesek m lira kazanacağız elbette,

bundan kuşquamız yok.

Eğer değiştirirsek, diğer zarfta $1/2$ olasılıkla $m/2$ lira olacak ve $1/2$ olasılıkla $2m$ lira olacak. Demek ki değiştirirsek beklentimiz,

$$\frac{1}{2} \times \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \times 2m = \frac{m}{4} + m = \frac{5m}{4}$$

olacak.

Değiştirmesek beklentimiz m olacaktır. $5m/4$, m 'den daha büyük olduğundan, bu sefer en iyi stratejinin değiştirmek olduğunu bulduk.

Aynı soruyu iki değişik biçimde düşündük ve birinde değiştirip değiştirmemenin fark etmediğini bulduk, diğerinde ise değiştirmenin daha iyi olacağını bulduk...

Matematikte iki ayrı yöntemle, iki ayrı yanıt bulmak pek enderdir. Olmaz değil, özellikle olasılık sorularında olabilir. Ama enderdir (Bkz. ünlü Bertrand Paradoksu).

Yaptığımız excel programı hangi yanıtın doğru olduğunu söylüyor. Ama yanlış yanıtın neden yanlış olduğunu kendimizi tatmin edecek biçimde ifade edemediyimizi de itiraf edelim.

Burada neler oluyor? Neden iki değişik yanıt buluyoruz? Bir yerde yanlış mı yaptık? Öyleyse yanlış nerede? Doğru yanıt nedir? Yoksa matematik çelişkili mi? Biz nerdeyiz ve amacımız ne? Bu ve benzeri soruların yanıtlarını bekliyoruz.

ihsan_einstein@yahoo.com ya da anesin@bilgi.edu.tr adresine yazabilirsiniz.



ma-
te-
ma-
tik

soh-
bet-
leri

Ali Nesin

İstanbul
Bilgi Üniversitesi
Matematik
Bölümü Başkanı

anesin@bilgi.edu.tr